3. Espaces de Hilbert et espaces L^2

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et soit $< .,. >$ un produit scalaire sur E. On note $\|.\|$ la norme associée. Si $x, y \in E$, démontrer les relations suivantes :
(a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(< x, y >) + \|y\|^2$;
(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;
(c) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\Re(< x, y >)$;
(d) $< x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des polynômes complexes de degré plus petit ou égal à 2.
(a) Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
(b) Si $P, Q \in E$, on définit

$$< P, Q >:= P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.
(c) Fixons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Si $P, Q \in E$, on définit maintenant

$$<< P, Q >>:= P(\alpha)\overline{Q(\alpha)} + P(\beta)\overline{Q(\beta)} + P(\gamma)\overline{Q(\gamma)}.$$

Sous quelle(s) condition(s) sur α, β et γ l'application $<< .,. >>$ est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soient f et g les fonctions d'une variable réelle définies par

$$f(x) = ax + 2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = bx + 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Les fonctions f et g appartiennent-elles à $\mathrm{L}^2([0,1])$ et $\mathrm{L}^2([-1,1])$? Si oui, calculer leurs normes respectives dans ces espaces.
(b) Sous quelles conditions sur a et b les fonctions f et g sont-elles orthogonales dans $\mathrm{L}^2([0,1])$?
(c) Même question, mais dans $\mathrm{L}^2([-1,1])$.
(d) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que les fonctions f et g sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2([0,1])$, en est-il de même dans $\mathrm{L}^2([-1,1])$? Si oui, démontrer-le. Sinon, donner un contre-exemple et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de a et b les fonctions f et g sont simultanément orthogonales dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ et $\mathrm{L}^2([-1,1])$.